模块三 导数常规题型

第 1 节 函数图象切线的计算（★★）

内容提要

本节收录与函数图象切线计算相关的问题，由于导数是切线的斜率，所以求切线往往得先求导，下面先回顾求导的公式：

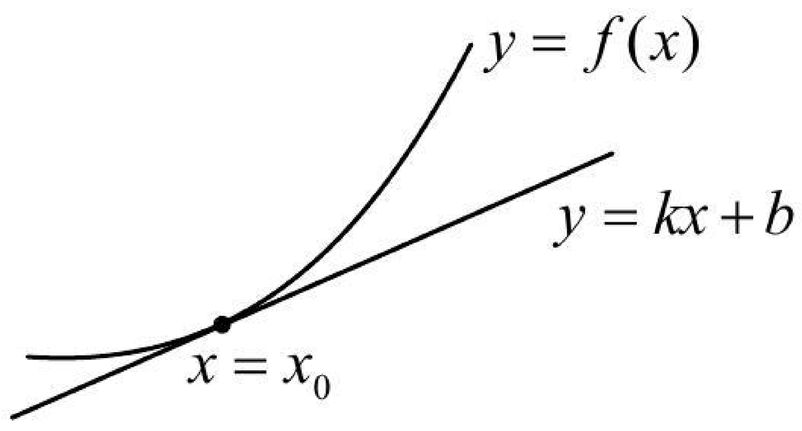
<table>
<tr><td rowspan="2">基本初等函数求导公式</td><td colspan="2">$C'=0$</td><td colspan="2">$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$</td><td>$(\sin x)'=\cos x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(\cos x)'=-\sin x$</td><td colspan="2">$(a^x)'=a^x\ln a$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$</td><td>$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">和差积商求导准则</td><td colspan="3">$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$</td><td colspan="2">$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$</td><td colspan="2">$[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$</td></tr>
<tr><td>复合函数求导准则</td><td colspan="5">$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$</td></tr>
</table>

函数的切线方程相关计算在高考中主要有以下几类题型：

1．求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线：切线的斜率 $k=f'(x_0)$，结合切点坐标可知切线的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2．求曲线 $y=f(x)$ 过点 $Q(m,n)$ 的切线：由于不知道切点坐标，故需设切点为 $P(x_0,f(x_0))$，写出切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，将点 $Q(m,n)$ 代入得到 $n-f(x_0)=f'(x_0)(m-x_0)$，由此方程解出 x_0，得到切点坐标，即可求出切线的方程.

3．已知直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切求参（参数在直线上或在 $f(x)$ 解析式中）：这类问题的处理方法是：如图，设切点横坐标为 x_0，可从切线斜率即为 $f'(x_0)$ 以及切点为切线与函数图象交点两方面建立方程组 $\begin{cases}k=f'(x_0)\\kx_0+b=f(x_0)\end{cases}$，解此方程组即可求出参数的值.



典型例题

类型Ⅰ：求函数在某点处的切线

【例 1】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为_____.

解析：由题意，$f(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $f'(1)=1$，故所求切线方程为 $y=x-1$.

答案：$y=x-1$

【变式 1】（2020·新课标Ⅰ卷）曲线$y=\ln x+x+1$的一条切线的斜率为 2，则该切线的方程为_____.

解析： 已知切线斜率，可先由此求切点，$y'=\dfrac{1}{x}+1$，令$y'=2$得：$\dfrac{1}{x}+1=2$，所以$x=1$，

代入$y=\ln x+x+1$可得$y=2$，所以切点的坐标为$(1,2)$，故所求切线方程为$y-2=2(x-1)$，即$y=2x$.

答案： $y=2x$

【变式 2】已知$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，则曲线$y=f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处的切线方程为（　　）

（A）$y=x-4$　　（B）$y=x$　　（C）$y=-2x$　　（D）$y=-2x+2$

解法 1： 奇函数中，已知$x<0$时的解析式，可先求出$x>0$时的解析式，

由题意，当$x<0$时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，所以当$x>0$时，$f(x)=-f(-x)=-[\ln(-2(-x))+1]=-\ln(2x)-1$，

故$f'(x)=-\dfrac{1}{2x}\cdot 2=-\dfrac{1}{x}$，所以$f'(\dfrac{1}{2})=-2$，$f(\dfrac{1}{2})=-1$，故所求切线方程为$y-(-1)=-2(x-\dfrac{1}{2})$，即$y=-2x$.

解法 2： 也可直接由$x<0$的解析式求$f'(-\dfrac{1}{2})$，再用奇函数的对称性得出$f'(\dfrac{1}{2})$，

由题意，当$x<0$时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{-2x}\cdot(-2)=\dfrac{1}{x}$，故$f'(-\dfrac{1}{2})=-2$，

又$f(x)$为奇函数，所以$f'(\dfrac{1}{2})=f'(-\dfrac{1}{2})=-2$，（原因见反思）

$f(\dfrac{1}{2})=-f(-\dfrac{1}{2})=-[\ln(-2\times(-\dfrac{1}{2}))+1]=-1$，故所求切线的方程为$y-(-1)=-2(x-\dfrac{1}{2})$，整理得：$y=-2x$.

答案： C

【反思】①如图 1，若函数的图象关于点(a,b)对称，则图象上关于(a,b)对称的两个点处导数值相等；②如图 2，若函数的图象关于直线$x=a$对称，则图象上关于$x=a$对称的两个点处，导数值相反.

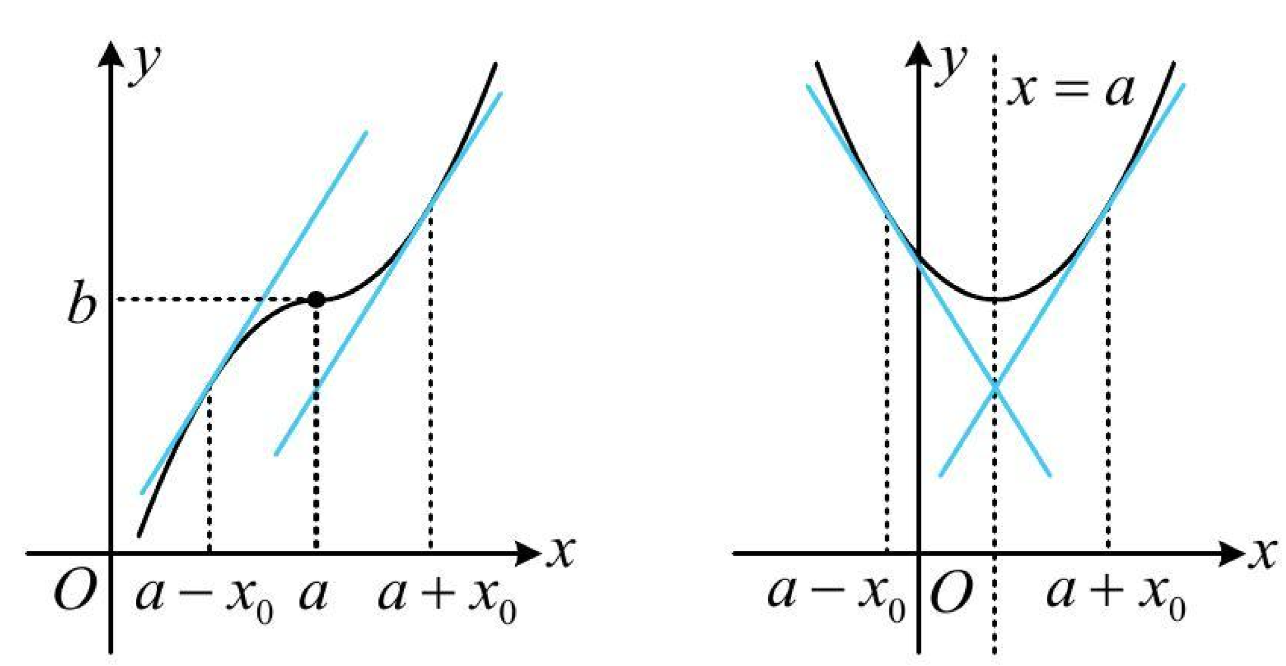


图1　　图2

类型Ⅱ：求函数过某点的切线

【例 2】（2022·新高考Ⅱ卷）曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为_____，_____.

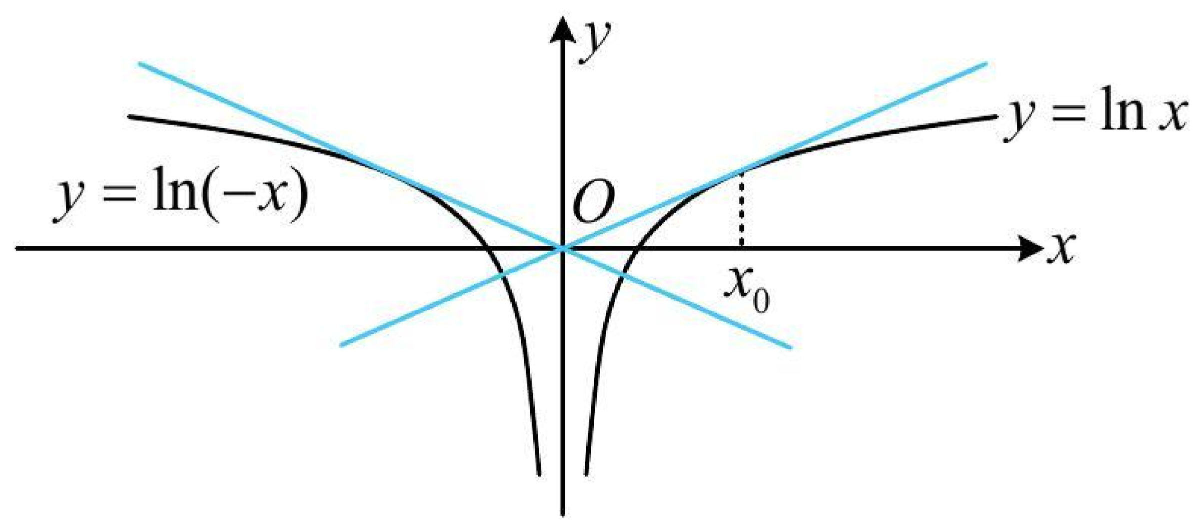
解析： 曲线 $y=\ln|x|$ 如图，由对称性，可先求该曲线位于 y 轴右侧部分的过原点的切线，

此部分的解析式为 $y=\ln x$，由于不知道切点，所以设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，

因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以该切线的方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，将原点 $(0,0)$ 代入可得：$-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\cdot(-x_0)$，

解得：$x_0=\mathrm{e}$，故切线方程为 $y-\ln\mathrm{e}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，整理得：$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，由对称性知另一条切线为 $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

答案： $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，$y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$



【变式 1】曲线 $y=x^3-x-2$ 过点 $P(2,4)$ 的切线方程为_____.

解析： 不知道切点，先设切点，设切点为 $(x_0,x_0^3-x_0-2)$，

由题意，$y'=3x^2-1$，所以切线方程为 $y-(x_0^3-x_0-2)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$ ①，

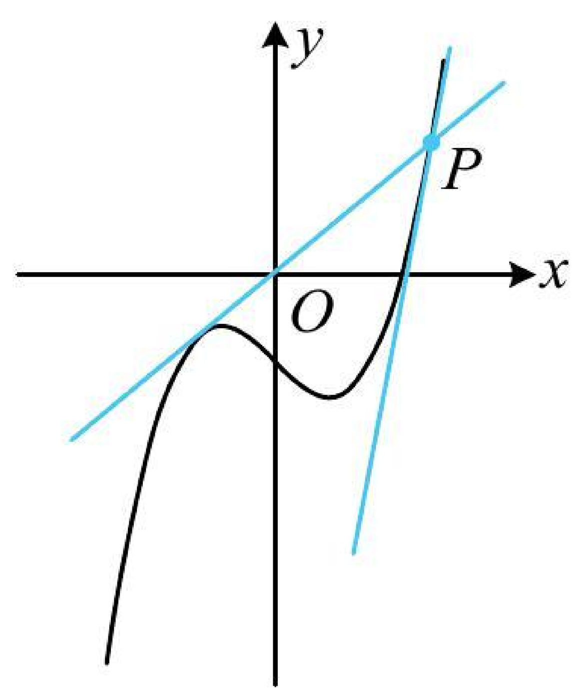
将点 $(2,4)$ 代入得：$4-(x_0^3-x_0-2)=(3x_0^2-1)(2-x_0)$，整理得：$x_0^3-3x_0^2+4=0$，

解一元三次方程可先试根，观察可得 $x_0=-1$ 是上述方程的一个解，那么因式分解就有了方向，

$x_0^3-3x_0^2+4=x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=x_0^2(x_0+1)-4(x_0+1)(x_0-1)=(x_0+1)(x_0-2)^2$，所以 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，

解得：$x_0=-1$ 或 2，代入式①得所求切线为 $y=2x$ 或 $y=11x-18$.（两条切线如图）

答案： $y=2x$ 或 $y=11x-18$



【反思】求函数过某点的切线方程，常按设切点，写出切线方程，将已知点代入求得切点的流程求解.

【变式 2】过点 $A(0,b)$ 能作两条直线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切，则实数 b 的取值范围是_____.

解法 1： 给的是过某点的切线，故不知道切点，于是设切点坐标，

设 $P(t,\mathrm{e}^t)$ 为曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上一点，因为 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，所以该曲线在 P 处的切线方程为 $y-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(x-t)$ ①，

为了找到过点 $A(0,b)$ 的切线，应将该点坐标代入上述切线方程，求解切点横坐标 t，

将 $A(0,b)$ 代入①得：$b-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(-t)$，整理得：$b=(1-t)\mathrm{e}^t$ ②，

过点 $(0,b)$ 能作两条直线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切等价于关于 t 的方程②有两个实数解，

方程②解的个数即为直线 $y=b$ 与函数 $y=(1-t)\mathrm{e}^t$ 图象的交点个数，要画图，先求导分析单调性，

设 $f(t)=(1-t)\mathrm{e}^t(t\in\mathbf{R})$，则 $f'(t)=-\mathrm{e}^t+(1-t)\mathrm{e}^t=-t\mathrm{e}^t$，所以 $f'(t)>0\Leftrightarrow t<0$，$f'(t)<0\Leftrightarrow t>0$，

故 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上↗，在 $(0,+\infty)$ 上↘，又 $f(0)=1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=-\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}(1-t)\mathrm{e}^t=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-t}{\mathrm{e}^{-t}}=0$，

所以 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，由图可知 $0<b<1$.

解法 2：曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 较为简单，切线容易画出，故也可画图分析，点 $A(0,b)$ 在 y 轴上，曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 及其渐近线 x 轴将 y 轴分成四部分，故分别讨论点 A 位于这四部分时的切线情况，

当 $b>1$ 时，点 A 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上方，如图 2，无法作出过 A 且与 $y=\mathrm{e}^x$ 相切的直线，不合题意；

当 $b=1$ 时，点 A 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上，如图 3，只能作出一条切线，不合题意；

当 $0<b<1$ 时，点 A 在 x 轴与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 之间，如图 4，可作两条切线，满足题意；

当 $b\le 0$ 时，点 A 在 x 轴的下方（或恰好在原点处），如图 5，只能作出一条切线，不合题意；

综上所述，实数 b 的取值范围是 $(0,1)$.

答案：$(0,1)$

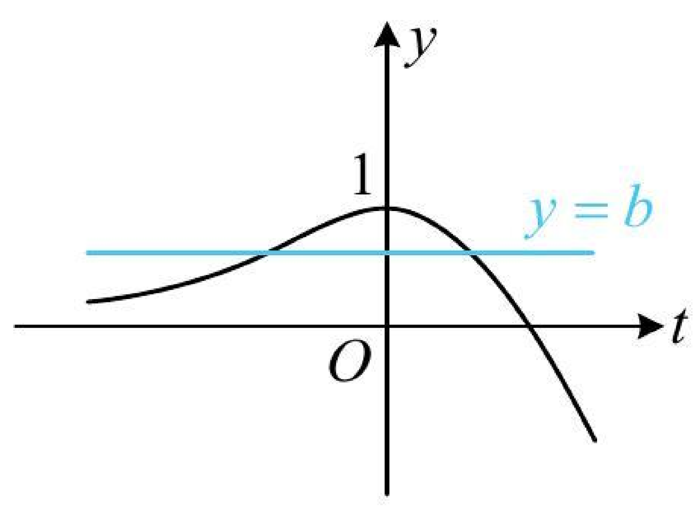


图1

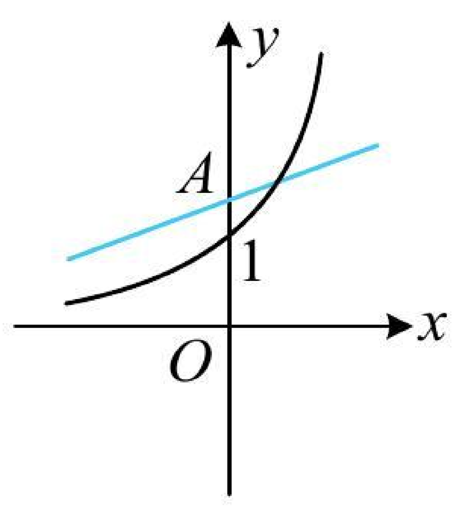


图2

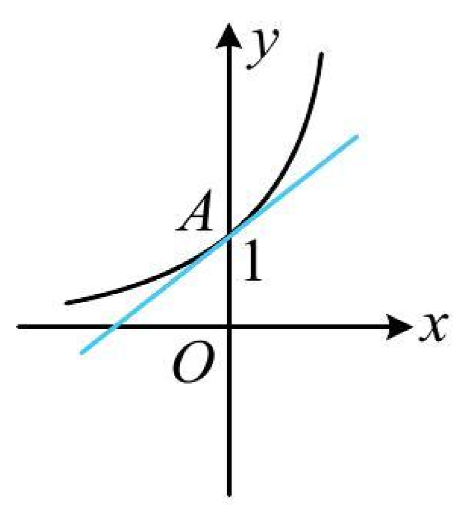


图3

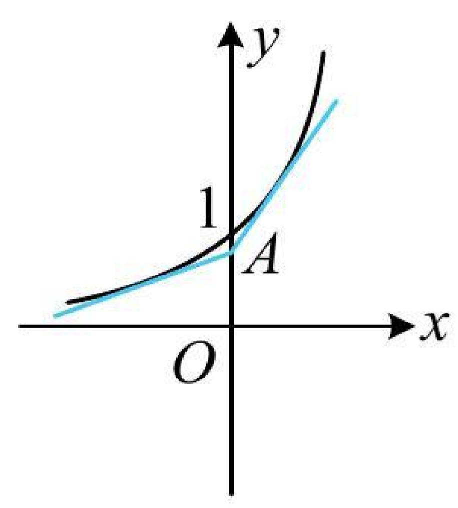


图4

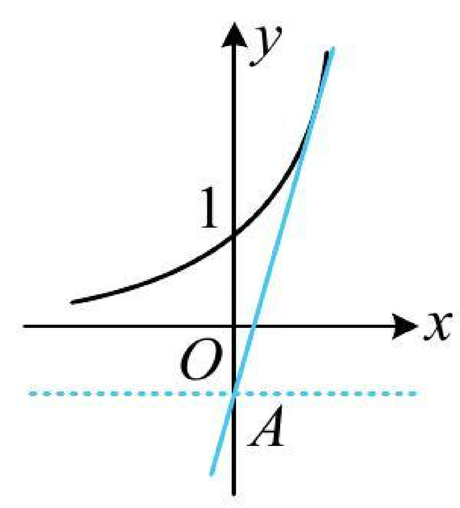


图5

【反思】①过某点能作某曲线几条切线这类问题，求解的一般流程是：设切点，写出切线方程→将已知点代入建立关于切点坐标的方程→分析该方程解的个数；②数形结合是一种重要的数学思想，像这种研究过某点可作某函数图象几条切线的问题，若函数的图象较为简单，则画图分析往往是优越的解法.

类型III：已知某直线与函数相切求参

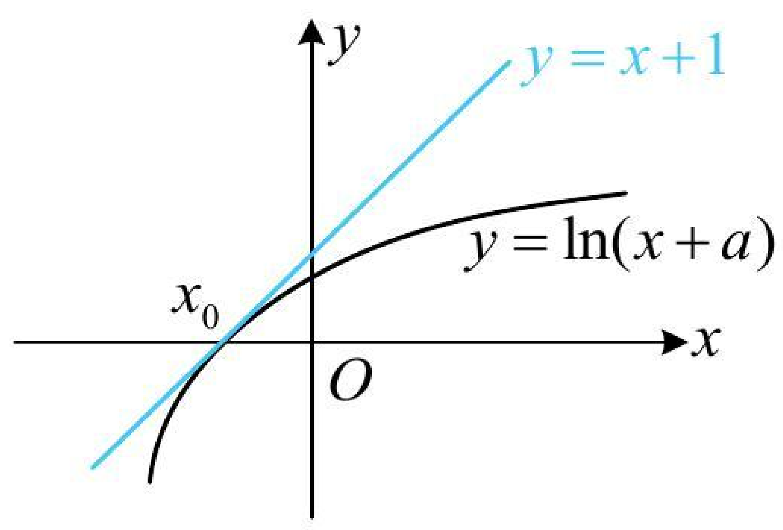
【例 3】已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 $a=$_____.

解析：已知切线求参，用内容提要 3 的方法，$y=\ln(x+a)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x+a}$，设切点横坐标为 x_0，

如图，$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+a}=1 \text{ ①（}x_0\text{处的导数与切线斜率相等）}\\ x_0+1=\ln(x_0+a) \text{ ②（}x_0\text{处是切线和函数图象的交点）}\end{cases}$，

由①可得 $x_0+a=1$，代入②可解得：$x_0=-1$，所以 $a=1-x_0=2$.

答案：2



【总结】已知直线与函数图象相切求参这类问题，常抓住切点处导数等于切线斜率、切点是切线与函数图象交点这两方面来建立方程组求解参数.

强化训练

1.（2023•河南商丘模拟•★）已知函数 $f(x)=x+4\sin x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为（　　）

（A）$5x-y=0$　（B）$5x+y=0$　（C）$x-5y=0$　（D）$x+5y=0$

2.（2023•全国乙卷（改）•★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$. 当 $a=-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

3.（2023•四川模拟•★★）设函数 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为（　　）

（A）e　（B）$\frac{\mathrm{e}}{2}$　（C）$\frac{\mathrm{e}}{4}$　（D）$\frac{\mathrm{e}}{8}$

4.（2022•四川成都模拟•★★）直线 $y=kx-2$ 与曲线 $y=x\ln x$ 相切，则实数 $k=$_____.

5.（2022•全国甲卷（改）•★★）已知函数 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，若 $x_1=-1$，则实数 a 的值为_____.

6．（2023 • 河北模拟 • ★★）曲线 $y=x^2$ 过点 $P(3,5)$ 的切线方程为_____.

7．（2019 • 江苏卷 • ★★★）点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$，则点 A 的坐标是_____.

8．（2022 • 安徽亳州模拟 • ★★★）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在点 $(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))$ 处的切线方程为_____.

9．（2022 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围为_____.

10．（2022 • 浙江金华期末 • ★★★★）已知函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象在点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直且交于点 $P(x_0,y_0)$，则（　　）

（A）$x_1x_2=-1$　　（B）$x_1x_2=\mathrm{e}$　　（C）$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$　　（D）$x_0=\frac{2}{x_1+x_2}$